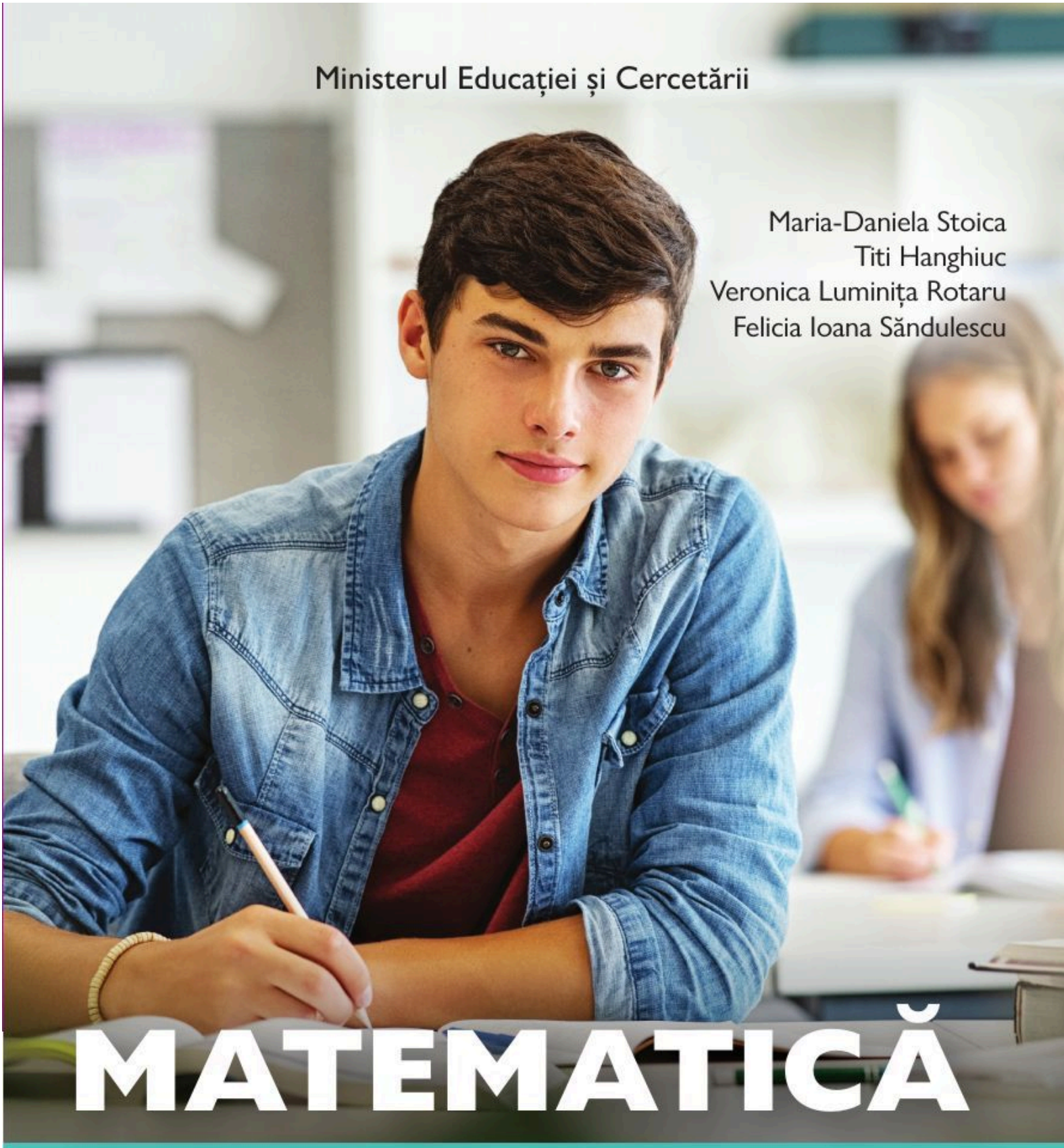
Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu



MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii – clasa a IX-a

Booklet

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

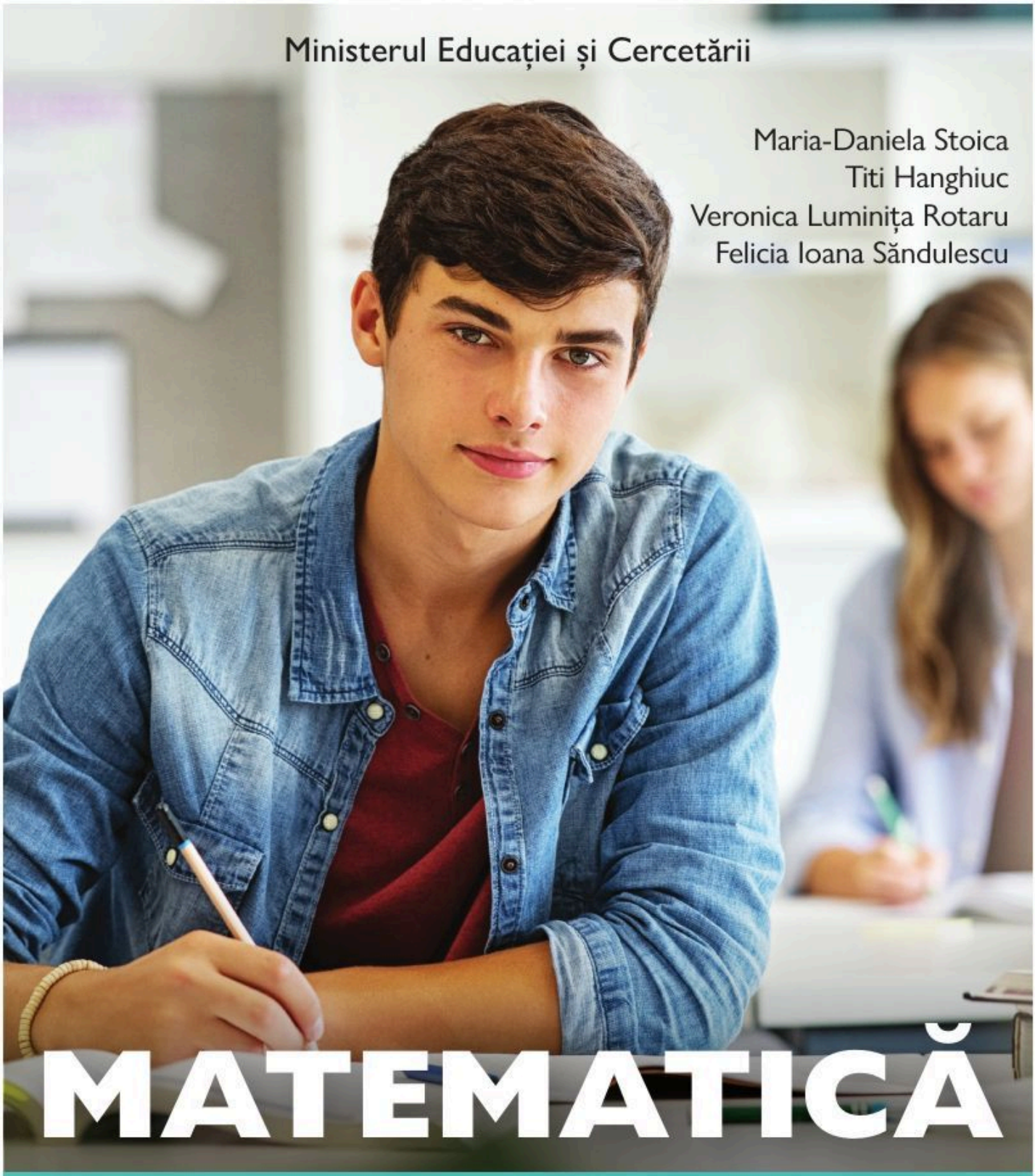
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 6930/19.12.2025.

Numărul de telefon 119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

Numărul de telefon 116.111 – număr de asistență pentru copii, în conformitate cu Legea nr. 272/2004 privind protecția și promovarea drepturilor copilului, republicată, cu modificările și completările ulterioare.

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu



MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii – clasa a IX-a

Booklet

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul de ministru nr. 5779/09.10.2026.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de opt ani școlari, începând din anul școlar 2026-2027.

Inspectoratul Școlar _____

Școala/Colegiul/Liceul _____

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				la primire	la predare
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii: clasa a IX-a / Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc, Veronica Luminița Rotaru, Felicia Ioana Săndulescu. – București : Booklet, 2026
ISBN 978-630-347-340-6

I. Stoica, Maria-Daniela
II. Hanghiuc, Titi
III. Rotaru, Veronica
IV. Săndulescu, Felicia

51

Referenți științifici: conf. univ. dr. habil. Georgia Irina Oros, Universitatea din Oradea
prof. gr. I Valerian Vlăduț, Liceul Teoretic „Dimitrie Bolintineanu", București
Redactor-șef: Bogdan Nicolai
Redactor: Ana Bratu
Corector rezolvator: Daniela Ciofu
Design copertă: Silvia Olteanu
Tehnoredactare: Carmen Dumitrescu
Grafică și DTP: Mihaela Cojoc
Video: Quartz Film Studio
Voce: Ramona Mihai
Digital: MyKoolio
Credite foto: Adobe Stock

Booklet
Pentru comenzi:
tel.: 021.430.30.95/021.440.10.02
e-mail: comenzi@booklet.ro
site: www.booklet.ro

© Editura Booklet
Toate drepturile asupra lucrării aparțin editurii.

CUPRINS

Competențe generale și specifice 5

Ghid de utilizare a manualului digital 6

Recapitulare inițială 7

Evaluare inițială 8

UNITATEA 1

Mulțimea numerelor reale 9

1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$; modulul unui număr real 10

Portofoliu 18

2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 19

Recapitulare 27

Evaluare 28

UNITATEA 2

Elemente de logică matematică 29

1. Propoziții și predicate; operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatori; reguli de negare

1.1. Propoziții și predicate 30

1.2. Operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența 34

1.3. Cuantificatori 41

Portofoliu 42

1.4. Reguli de negare 44

2. Metode de raționament: metoda reducerii la absurd; metoda inducției matematice

2.1. Metoda reducerii la absurd 46

Portofoliu 47

2.2. Metoda inducției matematice 48

Recapitulare 52

Portofoliu 53

Evaluare 54

UNITATEA 3

Polinoame cu coeficienți reali 55

1. Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame: adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar 56

2. Teorema împărțirii cu rest; algoritmul de împărțire a polinoamelor; împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner; divizibilitatea polinoamelor: definiție 65

3. Rădăcini reale ale polinoamelor; teorema lui Bézout 74

Recapitulare 81

Evaluare 82

UNITATEA 4

Progresii aritmetice și progresii geometrice 83

1. Dobânda simplă. Progresii aritmetice; determinarea termenului general al unei progresii aritmetice; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice 84

2. Dobânda compusă. Progresii geometrice; determinarea termenului general al unei progresii geometrice; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice 95

Studiu de caz 108

Recapitulare 109

Evaluare 110

UNITATEA 5

Geometrie analitică 111

1. Reper cartezian în plan; coordonatele carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan, coordonatele mijlocului unui segment 112

2. Panta unei drepte (ca raport) 120

3. Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată, ecuația dreptei care trece prin două puncte; intersecțiile dreptei cu axele de coordonate 125

4. Pozițiile relative ale unei drepte față de axele de coordonate; pozițiile relative a două drepte 133

5. Ecuația cercului 139

Proiect 144

Recapitulare 145

Evaluare 146

CUPRINS

UNITATEA 6

Funcții: observarea unor proprietăți ale funcțiilor utilizând lecturi grafice 147

1. Funcția afină 148

Portofoliu 155

2. Funcția de gradul al doilea 159

Investigație 169

3. Funcții obținute prin operații de înmulțire și/sau de împărțire, compunere cu funcții afine și funcții de gradul al doilea 170

4. Funcția putere cu exponent întreg 178

5. Funcția radical de ordin 2 și ordin 3 183

Portofoliu 188

6. Funcția exponențială (numărul irațional e) 189

Portofoliu 192

7. Funcția logaritmică (logaritmi, logaritm natural, logaritm zecimal) 193

Portofoliu 195

Recapitulare 196

Evaluare 198

UNITATEA 7

Elemente de trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie 199

1. Cercul trigonometric: studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$, studiul funcției tangentă pe intervalul $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

1.1. Cercul trigonometric 200

1.2. Studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$ 204

1.3. Studiul funcției tangentă pe $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcției trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$ 209

2. Formule trigonometrice de bază: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ 212

Investigație 217

3. Teorema cosinusului 218

4. Teorema sinusurilor 221

Portofoliu 223

5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare 224

Proiect în echipe 227

6. Aria triunghiului; ariile unor suprafețe poligonale 228

Recapitulare 233

Evaluare 234

Recapitulare finală 235

Evaluare finală 237

Indicații și răspunsuri 238

Anexă 240



Ce vei învăța anul acesta la matematică?

CG.1 - Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

IX.CS.1.1. Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră și a formei de scriere a unui număr real în diverse contexte

IX.CS.1.2. Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic

IX.CS.1.3. Identificarea elementelor caracteristice ale unui polinom

IX.CS.1.4. Identificarea elementelor specifice progresiilor în contexte variate

IX.CS.1.5. Identificarea datelor și a relațiilor care apar în configurații geometrice date

IX.CS.1.6. Identificarea unor proprietăți ale funcțiilor, pe baza reprezentării grafice a acestora

IX.CS.1.7. Identificarea punctelor asociate unor măsuri în radiani pe cercul trigonometric și pe graficele funcțiilor trigonometrice

CG.2 - Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

IX.CS.2.1. Prelucrarea unor date numerice din contexte matematice și/sau cotidiene

IX.CS.2.2. Aplicarea relațiilor logice pentru prelucrarea datelor matematice folosind propoziții și cuantificatori

IX.CS.2.3. Aplicarea unor reguli de calcul cu polinoame

IX.CS.2.4. Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor progresiilor aritmetice sau geometrice, utilizând formule specifice

IX.CS.2.5. Utilizarea datelor matematice de tip cantitativ, calitativ și structural dintr-o configurație geometrică

IX.CS.2.6. Descrierea unor proprietăți ale unei funcții, utilizând reprezentarea grafică a acesteia

IX.CS.2.7. Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice

CG.3 - Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

IX.CS.3.1. Utilizarea algoritmilor specifici și a proprietăților operațiilor cu numere reale extrase din diverse contexte

IX.CS.3.2. Utilizarea logicii matematice în formularea de propoziții și verificarea raționamentelor

IX.CS.3.3. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea calculelor cu polinoame

IX.CS.3.4. Utilizarea formulelor matematice pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sau geometrice

IX.CS.3.5. Aplicarea formulelor și a algoritmilor de bază ai geometriei analitice pentru a rezolva probleme teoretice și practice

IX.CS.3.6. Utilizarea aplicațiilor digitale pentru reprezentarea grafică a unor funcții în vederea extragerii unor informații referitoare la valori relevante ale acestora

IX.CS.3.7. Aplicarea formulelor trigonometrice de bază în rezolvarea problemelor

CG.4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

IX.CS.4.1. Folosirea limbajului și a simbolurilor matematice pentru formularea relațiilor și a pașilor de rezolvare în contextul numerelor reale

IX.CS.4.2. Exprimarea raționamentelor matematice în limbaj specific logicii matematice (propoziții/predicate, operații, cuantificatori)

IX.CS.4.3. Utilizarea limbajului specific polinoamelor în redactarea demersului de rezolvare a problemelor în care intervin acestea

IX.CS.4.4. Transpunerea în limbaj specific a unor situații cotidiene care conduc la progresii aritmetice sau geometrice

IX.CS.4.5. Utilizarea limbajului specific în redactarea demersului de rezolvare a problemelor de geometrie analitică

IX.CS.4.6. Transpunerea în limbaj matematic a informațiilor obținute din compararea unor grafice de funcții

IX.CS.4.7. Exprimarea în limbajul trigonometriei a datelor și relațiilor din configurații geometrice, în contexte variate

CG.5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

IX.CS.5.1. Interpretarea proprietăților numerelor reale în situații date

IX.CS.5.2. Analizarea relațiilor logice dintre componentele unui enunț matematic asociat unei situații date

IX.CS.5.3. Analizarea metodelor de rezolvare a unor probleme în studiul polinoamelor

IX.CS.5.4. Analizarea unei situații cotidiene descrise printr-o progresie aritmetică sau geometrică

IX.CS.5.5. Analizarea pozițiilor relative a dreptelor și/sau cercurilor, interpretând semnificația acestora în contexte practice

IX.CS.5.6. Analizarea proprietăților unei funcții prin corelarea informațiilor desprinse din diferite reprezentări/descrieri ale acesteia

IX.CS.5.7. Analizarea modului optim de determinare a ariilor unor figuri geometrice folosind formule trigonometrice

CG.6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

IX.CS.6.1. Modelarea unor situații concrete utilizând proprietăți ale numerelor reale

IX.CS.6.2. Modelarea unei situații date utilizând elemente de logică matematică

IX.CS.6.3. Modelarea matematică a unor probleme practice utilizând polinoame, în context intra și interdisciplinar (fizică, chimie, biologie)

IX.CS.6.4. Modelarea matematică a unor situații cotidiene utilizând progresii

IX.CS.6.5. Modelarea matematică a unor experimente din domeniul științelor naturii (biologie, fizică, chimie), utilizând elemente de geometrie analitică

IX.CS.6.6. Modelarea prin intermediul funcțiilor a unor fenomene/contexte din viața cotidiană

IX.CS.6.7. Modelarea matematică a unor situații practice care implică concepte trigonometric

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferindu-le elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:



1. Elemente grafice (AMII statice):
imagini, informații și activități suplimentare.



2. Elemente video (AMII animate):
videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.



3. Exerciții interactive (AMII interactive):
exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior



Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.



Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.



Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.



Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.



Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.



Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.



Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.



Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.



Tipărește pagini din manualul digital.



Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Citește cerința, apoi utilizează mouse-ul și/sau tastatura pentru a rezolva exercițiile conform instrucțiunilor. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare ✔ în cazul răspunsului corect și ✘ în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încearcă** sau reîncarcă pagina.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII animate):

Apasă butonul pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

1. Compară numerele reale a și b.

a) $a = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98} - 3\sqrt{8}$, $b = \frac{11}{\sqrt{12}} - \frac{7}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{300}}$;

b) $a = \left(-\frac{15}{49} : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;

c) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$, $b = 9^5 : 27^2$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $-4 + 2x = 0$;

b) $1 - 4x = 6x - 7$;

c) $3 - 2(1 - 3x) = 3(1 + 2x) + 1$;

d) $\frac{3 + 4x}{2} - \frac{3x - 5}{12} = \frac{1 - 2x}{4} + 3$;

e) $x^2 = 36$;

f) $x^2 - x = 6$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x + 1| \leq 5\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x - 2(x + 1) < -3\}$.

a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.

b) Determină suma numerelor întregi din mulțimea A.

c) Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.

4. Pentru 4 caiete tip dictando și 5 caiete cu foaie velină, Ana a plătit la casă 174 de lei, iar pentru 3 caiete tip dictando și 2 caiete cu foaie velină, de același tip cu cele cumpărate de Ana, Maria a plătit 99 de lei. Determină prețul unui caiet tip dictando și prețul unui caiet cu foaie velină.

5. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 4(x + 1)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Arată că $E(1)$ este un număr întreg mai mic decât -20.

b) Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x) \geq 1$.

6. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3x - }{x^2 - 4x + 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{x + 2}\right) : \frac{x + 1}{x - 2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$. Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x + 2}$, pentru orice număr real x, unde $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$.

a) Arată că $f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.

b) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy.

c) Verifică dacă punctul $A(-1, -7)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

d) Determină numărul real m pentru care punctul $M(m, -8)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

e) Determină coordonatele punctului N de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy, știind că acesta are coordonatele egale.

f) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

g) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 5$.

h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 9$.

8. Fie MNP un triunghi dreptunghic $\sphericalangle N = 90°$ cu $MN = 12$ cm și $NP = 9$ cm. Punctul Q este proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta MP.

a) Calculează aria triunghiului MNP.

b) Calculează lungimea segmentului NQ.

c) Calculează $\sin(\sphericalangle PNQ)$.

9. Fie ABC un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) cu $BC = 16$ cm și $\sphericalangle B = 30°$. Punctul M este mijlocul segmentului BC. Arată că perimetrul triunghiului AMB este mai mic decât 32 cm.

10. Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD cu $AB = 6$ cm și $VA = 5$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului VA și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Determină aria totală și volumul piramidei VABCD.

b) Demonstrează că dreapta OM este paralelă cu planul (VCD).

Evaluare inițială

Timp de lucru: 45 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **30 de puncte**

30 de puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(10 p.)	**A.** Se consideră intervalele de numere reale $I = (-\infty, 3)$ și $J = [-2, +\infty)$. Intersecția intervalelor I și J este intervalul: a) $(-\infty, 3)$; b) $[-2, 3)$; c) $(-2, 3]$; d) $(3, +\infty)$.
(10 p.)	**B.** Dacă $a = \sqrt{3} + 1$ și $b = \sqrt{12}$, atunci $a^2 - b$ este egal cu: a) $\sqrt{12}$; b) $4 - \sqrt{12}$; c) 4; d) -1.
(10 p.)	**C.** Dacă ABC este un triunghi cu AB = 4 cm, AC = 3 cm și BC = 5 cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu: a) 6 cm^2; b) 12 cm^2; c) 15 cm^2; d) 17 cm^2.

Subiectul al II-lea **60 de puncte**

Scrie rezolvările complete.

45 de puncte	**1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 8$.
(10 p.)	**a)** Calculează $f\left(\frac{5}{2}\right) - 2f\left(-\frac{1}{4}\right)$.
(5 p.)	**b)** Verifică dacă punctul A(-1, 4) aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.
(10 p.)	**c)** Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.
(10 p.)	**d)** Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 10$.
(10 p.)	**e)** Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 4$.
15 puncte	**2.** Se consideră tetraedrul regulat ABCD cu AB = 12 cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AD.
(5 p.)	**a)** Determină volumul tetraedrului ABCD.
(10 p.)	**b)** Determină lungimea segmentului MN.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua cunoștințele dobândite în anul școlar precedent.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Unitatea

1

Mulțimea numerelor reale

► 1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat:
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$; modulul unui număr real

► 2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real





1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$; modulul unui număr real

Îmi amintesc

Se consideră mulțimea $A = \left\{ \sqrt{6};\ 0,(3);\ -\frac{1}{3};\ \sqrt{16};\ -\sqrt{3^2};\ -\sqrt{15};\ \frac{12}{4};\ \frac{7}{3};\ (-4)^2;\ -\sqrt{1\frac{9}{16}} \right\}$.
Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

Învăț

Din clasele anterioare vă sunt cunoscute următoarele mulțimi de numere:

- **Mulțimea numerelor naturale:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;
- **Mulțimea numerelor întregi:** $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$;
- **Mulțimea numerelor iraționale:** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- **Mulțimea numerelor reale:** $\mathbb{R}$.

Ținând cont de modul în care a fost definită mulțimea numerelor reale și de relațiile de incluziune cunoscute, avem:

$$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset;$$
$$\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R};$$
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



OBSERVAȚIE.

Orice număr real se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită (periodică sau neperiodică) $a_0,a_1a_2a_3...$ (unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$).

1. Operații algebrice cu numere reale. Proprietăți

Pe mulțimea numerelor reale s-au definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea.

1.1. Adunarea numerelor reale

Operația de adunare pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi de numere reale (x, y) un unic număr real notat $x + y$, numit **suma numerelor reale** x **și** y.

Proprietățile adunării numerelor reale

- Adunarea numerelor reale este **comutativă:**

$$a + b = b + a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Adunarea numerelor reale este **asociativă:**

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- Numărul real **0 este element neutru** pentru adunarea numerelor reale:

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

- **Pentru orice număr real nenul a, există** un număr real nenul, notat $-a$ și numit **opusul lui a**, astfel încât:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

OBSERVAȚII.

1. Opusul numărului real 0 este 0.

2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, se definește **diferența dintre x și y**, notată $x - y$, ca fiind **suma dintre x și opusul lui y**.

$$x - y = x + (-y), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}$$

Propoziție. **Pentru orice numere reale a și b, unde $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.**

Demonstrație:

Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Presupunem că $a + b \in \mathbb{Q}$. Notând $x = a + b$, obținem $b = x - a$. Cum $a, x \in \mathbb{Q}$, rezultă că $x - a \in \mathbb{Q}$ (diferența a două numere raționale este un număr rațional). Deci $b = x - a \in \mathbb{Q}$, ceea ce contrazice ipoteza $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Presupunerea că $a + b \in \mathbb{Q}$ este falsă și, în concluzie, $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Înmulțirea numerelor reale

Operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale un unic număr real notat $x \cdot y$, numit **produsul numerelor reale x și y**.



Proprietățile înmulțirii numerelor reale

- Înmulțirea numerelor reale este **comutativă:**

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R};$$

- Înmulțirea numerelor reale este **asociativă:**

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R};$$

- Numărul real **1 este element neutru** pentru înmulțirea numerelor reale:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R};$$

- Pentru orice număr real nenul a, există un număr real nenul, notat $\frac{1}{a}$ și numit **inversul lui a**, astfel încât:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

- **Înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunarea numerelor reale:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAȚII.

1. Numărul real 0 nu are invers.

2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, se definește **câtul dintre x și y**, notat $\frac{x}{y}$, ca fiind **produsul dintre x și inversul lui y**.

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$$

Din clasele anterioare ne amintim:

- **Fie a un număr real și n un număr natural, $n > 1$. Puterea a n-a a numărului real a este** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

Prin convenție:

$a^0 = 1$, pentru oricare număr real nenul a;

$a^1 = a$, pentru oricare număr real a.

Nu se definește 0^0.

- Pentru numărul real nenul a și numărul natural nenul n se definește $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- **Fie $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Se numește radical din x (sau rădăcina pătrată a numărului x) numărul real $y \geq 0$ cu proprietatea $y^2 = x$. Se notează $y = \sqrt{x}$.**

Propoziție. **Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci:**

$$a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow a \neq 0;$$

$$a \cdot b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = 0.$$

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ pot fi numere raționale sau iraționale.

EXEMPLE:

1. Dacă $a = -2 + \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b = -2 + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = -2 \in \mathbb{Q}$.
2. Dacă $a = 1 + \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Dacă $a = 1 + \sqrt{5}$ și $b = \sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a - b = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{Q}$.
4. Dacă $a = \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a - b = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
5. Dacă $a = \sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot b = \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3 \cdot 3} = 3\sqrt{9} = 9 \in \mathbb{Q}$.
6. Dacă $a = \sqrt{10}$ și $b = \sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot b = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10 \cdot 5} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
7. Dacă $a = 3\sqrt{2}$ și $b = \sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Q}$.
8. Dacă $a = \sqrt{30}$ și $b = \sqrt{6}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{30}{6}} = \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Operațiile cu numere reale se efectuează astfel:

- Dacă într-un calcul fără paranteze se întâlnesc numai operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, aplicând proprietățile operațiilor, dacă este cazul.

- Dacă într-un calcul fără paranteze se întâlnesc operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul III (ridicarea la putere și extragerea rădăcinii pătrate), apoi operațiile de ordinul II (înmulțirea și împărțirea) și, după acestea, operațiile de ordinul I (adunarea și scăderea).

• Dacă într-un calcul se întâlnesc paranteze rotunde, paranteze drepte, acolade, se efectuează întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și apoi operațiile din acolade. După efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acoladele devin paranteze drepte, iar parantezele drepte devin paranteze rotunde.

2. Formule de calcul prescurtat

Din clasa a VIII-a ne amintim următoarele formule de calcul prescurtat:

$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$, pentru orice numere reale a și b;

$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$, pentru orice numere reale a și b;

$\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$, pentru orice numere reale a și b.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale. Atunci:

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Așadar:

$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$, pentru orice numere reale a și b;

$\mathbf{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$, pentru orice numere reale a și b.

EXEMPLE:

1. $(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3 + 3\cdot 2x\cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27, x \in \mathbb{R}$;

2. $(1+\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$;

3. $(-x+2)^3 = (-x)^3 + 3\cdot(-x)^2\cdot 2 + 3\cdot(-x)\cdot 2^2 + 2^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8, x \in \mathbb{R}$;

sau

$(-x+2)^3 = (2-x)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot x + 3\cdot 2\cdot x^2 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8, x \in \mathbb{R}$;

4. $(-x-1)^3 = (-x)^3 - 3\cdot(-x)^2\cdot 1 + 3\cdot(-x)\cdot 1^2 - 1^3 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1, x \in \mathbb{R}$;

sau

$(-x-1)^3 = [(-1)(x+1)]^3 = (-1)^3(x+1)^3 = (-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.



Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) =$

$= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) =$

$= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab] = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Așadar:

$\mathbf{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$, pentru orice numere reale a și b;

$\mathbf{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$, pentru orice numere reale a și b.

EXEMPLE:

1. $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)[(2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2] = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1), x \in \mathbb{R}$;

2. $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9), x \in \mathbb{R}$.

3. Raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$

O expresie care conține radicali se numește **conjugata** unei alte expresii care conține radicali, dacă produsul lor se poate scrie fără radicali. În acest caz, cele două **expresii** se numesc **conjugate**.

OBSERVAȚII.

O conjugată a unei expresii care conține radicali se obține folosind formula de calcul prescurtat:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, pentru orice numere reale a și b.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, atunci $\mathbf{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b}$, de unde rezultă că **expresiile $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$ sunt conjugate**.

EXEMPLE:

1. O conjugată a expresiei $\sqrt{5}$ este $\sqrt{5}$.

2. Expresiile $2 + \sqrt{7}$ și $2 - \sqrt{7}$ sunt conjugate.

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ și $c, d \in \mathbb{R}^*$, atunci $\mathbf{(c\sqrt{a} + d\sqrt{b})(c\sqrt{a} - d\sqrt{b}) = c^2a - d^2b}$, de unde rezultă că expresiile $\mathbf{c\sqrt{a} + d\sqrt{b}}$ și $\mathbf{c\sqrt{a} - d\sqrt{b}}$ sunt conjugate.

EXEMPLE:

1. Expresiile $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sunt conjugate.

2. Expresiile $3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}$ și $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$ sunt conjugate.

3. Expresiile $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sunt conjugate.

Operația de eliminare a radicalului/radicalilor de la numitorul unei fracții se numește **raționalizarea numitorului**. Pentru a raționaliza numitorul unei fracții care conține radicali, se amplifică fracția cu o conjugată a numitorului.

EXEMPLE:



1. $\overset{\cdot\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $\overset{\cdot\sqrt{5}}{\frac{10}{3\sqrt{5}}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$;

3. $\overset{\cdot(2+\sqrt{3})}{\frac{3}{2 - \sqrt{3}}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 3(2 + \sqrt{3})$;

4. $\overset{\cdot(5-\sqrt{19})}{\frac{3}{5 + \sqrt{19}}} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{(5 + \sqrt{19})(5 - \sqrt{19})} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{25 - 19} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{6} = \frac{5 - \sqrt{19}}{2}$;

5. $\overset{\cdot(2\sqrt{3}-1)}{\frac{11}{2\sqrt{3} + 1}} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{12 - 1} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{11} = 2\sqrt{3} - 1$;

6. $\overset{\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{18 - 12} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$.

4. Modulul unui număr real (valoarea absolută a unui număr real)

Din clasele anterioare, știm că **axa numerelor este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O, numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură**. Oricărui număr real x îi putem asocia pe axa numerelor un unic punct. Vom spune că punctul respectiv are coordonata x. De exemplu, în figura 1, punctul A are coordonata 1 (scriem A(1) și citim „punctul A de coordonată 1"), punctul B are coordonata −3 (scriem B(−3) și citim „punctul B de coordonată −3"), iar punctul C are coordonata $\sqrt{5}$ (scriem C($\sqrt{5}$) și citim „punctul C de coordonată $\sqrt{5}$").

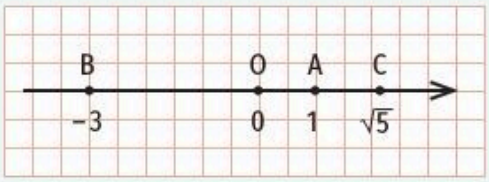


Figura 1

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr real x pe axa numerelor se numește modulul numărului real x. Se notează $|x|$.
Modulul unui număr real x se mai numește și valoarea absolută a numărului x.

EXEMPLE:

1. Modulul numărului real −3 este egal cu distanța de la punctul O la punctul B(−3), deci $|-3| = 3$ (figura 1).
2. Modulul numărului real $\sqrt{5}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul C($\sqrt{5}$), deci $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ (figura 1).

OBSERVAȚIE.

Ținând cont de definiția modulului unui număr real, avem:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

EXEMPLE:

1. $|-7| = 7$;
2. $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$;
3. $|\sqrt{10}| = \sqrt{10}$;
4. $|-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.

Proprietățile modulului unui număr real

- $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (inegalitatea triunghiului);
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom demonstra în continuare proprietatea $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $x = 0$, atunci $|x + y| = |y|$, $|x| = 0$, $|x| + |y| = |y|$, deci $|x + y| = |x| + |y|$, pentru orice număr real y.

Dacă $y = 0$, atunci $|x + y| = |x|$, $|y| = 0$, $|x| + |y| = |x|$, deci $|x + y| = |x| + |y|$, pentru orice număr real x.

Presupunem $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Se disting patru cazuri:

a) Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x + y > 0$ și $|x| = x$, $|y| = y$, $|x| + |y| = x + y$, $|x + y| = x + y$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

b) Dacă $x < 0$, $y < 0$, atunci $x + y < 0$ și $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = (-x) + (-y)$, $|x + y| = -(x + y)$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

c) Dacă $x > 0$ și $y < 0$, atunci $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = x + (-y)$.

În acest caz avem două situații: $x + y \geq 0$ sau $x + y < 0$.

- Dacă $x + y \geq 0$, atunci $|x + y| = x + y = |x| + y \leq |x| + |y|$.
- Dacă $x + y < 0$, atunci $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = (-x) + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$.

d) Dacă $x < 0$ și $y > 0$, demonstrația se face analog cazului c).

Propoziție. **Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și punctele A și B pe axa numerelor care au coordonatele a și, respectiv, b. Atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu $|a - b|$.**

Demonstrație:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și punctele A și B pe axa numerelor, care au coordonatele a și, respectiv, b. Atunci distanța dintre punctele A și B este lungimea segmentului AB.

Dacă $a = b$, atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu 0, deci $AB = |a - b|$.

Presupunem $a < b$. Se disting trei cazuri:

a) Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $AB = OA - OB = |a| - |b| = (-a) - (-b) = -(a - b) = |a - b|$.

b) Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $AB = OB - OA = |b| - |a| = b - a = -(a - b) = |a - b|$.

c) Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci $AB = OA + OB = |a| + |b| = (-a) + b = -(a - b) = |a - b|$.

Așadar, $AB = |a - b|$.

ȘTIAI CĂ...?

Raportul dintre lungimea și lățimea unei coli de hârtie A4 este exact $\sqrt{2}$, fapt care permite ca, prin tăierea sau plierea foii în două, astfel încât lățimile să se suprapună, noile dimensiuni (A5) să păstreze exact aceleași proporții ca originalul.

Exercițiu rezolvat

Fie x un număr real nenul, cu proprietatea $x + \frac{1}{x} = 3$. Determină $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Rezolvare:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

Aplic

1. Dă exemple de numere naturale n pentru care:
   a) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Dă exemple de numere $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care:
   a) $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Dă exemple de două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea:
   a) $a + b \in \mathbb{Q}$; b) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.
4. Se consideră mulțimea:

   $A = \left\{-2\sqrt{3}; 1,2(3); -\frac{5}{4}; \sqrt{25}; -\sqrt{(-2)^2}; -\sqrt{10}; \frac{20}{5}; \frac{6}{5}; (-3)^2; \sqrt{2\frac{7}{9}}\right\}$.

   Determină mulțimile: $A \cap \mathbf{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbf{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

5. Este posibil ca media aritmetică a trei numere naturale să fie egală cu 7,5? Justifică.

6. Determină a 100-a zecimală a numărului a.

a) $a = 1,2$; b) $a = \frac{5}{3}$; c) $a = \frac{5}{18}$; d) $a = \frac{3}{7}$.

7. Determină suma primelor 50 de zecimale ale numărului real a.

a) $a = \frac{50}{9}$; b) $a = \frac{17}{6}$; c) $a = \frac{13}{14}$.

8. Demonstrează că numărul a este natural.

a) $a = \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{24}\right) \cdot \frac{4}{9} + \frac{7}{6}$; b) $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

9. Determină media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

a) $a = \left[\left(-\frac{15}{49}\right) : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right] \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;

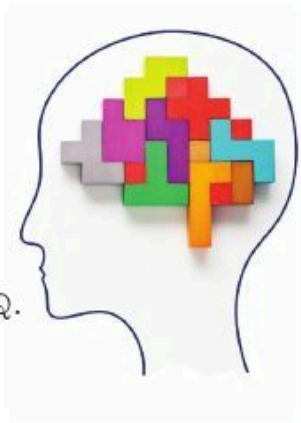
b) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$; $b = 9^5 \cdot 27^2 : 81 \cdot \left(-\frac{1}{243}\right)^{-2}$;

c) $a = \sqrt{3^2 + 4^2}$, $b = \sqrt{250 + 10\sqrt{215 + \sqrt{64 + 2\sqrt{324}}}}$;

d) $a = (9 + 4\sqrt{5})^2$, $b = (4\sqrt{5} - 9)^2$.

e) $a = (3 + \sqrt{3})^3$, $a = (3 - \sqrt{3})^3$;

f) $a = (2 + \sqrt{5})^3$, $a = (\sqrt{5} - 2)^3$.



10. Se consideră numerele reale a și b. Arată că $\sqrt{a \cdot b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$a = 2,1(6) - \frac{31}{8} + 1,08(3)$ și $b = 0,(6) \cdot 1,5 + 3,25 : 0,13 - \left(\frac{1}{30}\right)^{-1}$.

11. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$; e) $\frac{10}{\sqrt{15}-\sqrt{10}}$; g) $\frac{11}{2\sqrt{3}+1}$; i) $\frac{12}{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}$;

b) $\frac{6}{\sqrt{12}}$; d) $\frac{6}{3+\sqrt{6}}$; f) $\frac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}$; h) $\frac{10}{3\sqrt{5}-5}$; j) $\frac{17}{3\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$.

12. Stabilește dacă a este număr rațional sau număr irațional.

a) $a = \left(\frac{5}{\sqrt{18}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{11}{\sqrt{72}}\right) \cdot 3$; c) $a = \frac{10}{8\sqrt{2}-6\sqrt{3}} + \frac{3}{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}} + \frac{2}{4\sqrt{3}-7}$;

b) $a = \frac{8}{\sqrt{6}+2} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{3}{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}$; d) $a = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+5} - \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3} - \frac{5\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right) : (7\sqrt{3} - 26)$.

13. Determină valorile numărului real x pentru care:

a) $|x| = 5$; d) $|2x+1| + |4x^2 - 1| = 0$; g) $|3x-2| + 2 \cdot |2-3x| = 9$;

b) $|2x-1| = 7$; e) $|x-1| + |x+2| = 0$; h) $|x^2 - x| = 2$;

c) $\left|\frac{1-3x}{4}\right| = 5$; f) $|x| + |-2x| = 5$; i) $||x-1| - 2| = 3$.

14. Două puncte de pe axa numerelor reale au coordonatele a ($a \in \mathbb{R}$) și, respectiv, 3, iar distanța dintre acestea este egală cu 5. Determină valorile numărului real a.

15. Două puncte de pe axa numerelor reale au coordonatele a ($a \in \mathbb{R}$) și, respectiv, -5, iar distanța dintre acestea este egală cu 7. Determină valorile numărului real a.

16. Demonstrează că $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul n.

a) $a = \sqrt{5^n + 3}$; c) $a = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

b) $a = \sqrt{4n+3}$; d) $a = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 8}$, $n \geq 5$.

ȘTIAI CĂ...?

- Dacă raportul dintre lungimea și lățimea unei coli de hârtie ar fi diferit de $\sqrt{2}$, procesul de fotocopiere ar fi ineficient: la mărirea sau micșorarea unui document, imaginea s-ar deforma sau marginile nu ar fi egale.
- Datorită acestui raport ($\sqrt{2}$), orice dispozitiv care redimensionează un conținut vizual de la un format la altul trebuie doar să aplice un factor de scalare constant, cu scopul de a umple perfect pagina.



PROVOCARE

Demonstrează că singurul raport dintre laturile unui dreptunghi care permite păstrarea proporțiilor prin pliere, astfel încât lățimile să se suprapună, este $\sqrt{2}$.

NUMERE IRAȚIONALE CELEBRE. NUMĂRUL π

- Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc și lungimea diametrului acestuia este un număr irațional, care se notează cu π **(π = 3,14159265...)**, cunoscut sub denumirea „constanta lui Arhimede".
- Aproximativ în anul 250 î.H., **Arhimede** a demonstrat că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.
- Notația π a fost introdusă în anul 1706 de matematicianul galez **William Jones** (1675-1749).
- În anul 1768, **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777), matematician, fizician, astronom și filozof important din secolul al XVIII-lea, a demonstrat că numărul π este irațional.
- În anul 2016, omul de știință elvețian **Peter Trueb** a determinat primele 22 459 157 718 361 de zecimale ale numărului π. În acest scop, el a utilizat un server și un sistem de stocare echipat cu câteva zeci de hard-diskuri.
- Ziua Mondială a numărului π este celebrată la 14 martie.

17. Fie a și b numere reale astfel încât $a + b = 5$ și $ab = 6$. Determină $a^3 - b^3$ și $a^3 + b^3$.

18. Fie a și b numere reale. Determină $a \cdot b$, știind că:

a) $a^3 + b^3 = 22$ și $a + b = 1$;

b) $a^3 - b^3 = -19$ și $a - b = -1$.

19. Fie a și b numere reale astfel încât $a - b = 1$ și $a^3 - b^3 = 19$. Determină $a^2 + b^2$.

20. Fie a și b numere reale astfel încât $a + b = -1$ și $a^3 + b^3 = -61$. Determină $a^2 + b^2$.

21. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$. Determină $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

22. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x - \frac{1}{x} = 2$. Determină $x^3 - \frac{1}{x^3}$.

23. Descompune în factori ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x^3 + x^2 - 2x - 8$; b) $8x^3 - 12x^2 - 6x + 1$; c) $x^3 - x - 24$.

24. Se consideră expresia $E(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, unde x este număr real. Demonstrează că, dacă $E(x) = E(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \neq y$, atunci $(x + y)(x + y + 1) = xy - 1$.

25. Demonstrează că $\frac{n^3 - 1}{n - 1} + \frac{n^3 + 1}{n + 1} \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

26. Fie a și b numere reale, astfel încât $a + b$ și $a - b$ să fie numere raționale. Sunt a, b, ab numere raționale? Justifică.

27. Fie a și b numere raționale astfel încât $a + b\sqrt{3} = 0$. Demonstrează că $b = 0$.

INDICAȚII PENTRU REALIZAREA PORTOFOLIULUI



Alege o mapă sau un dosar și adaugă o primă pagină cu numele disciplinei și cu datele tale de identificare (numele tău complet, clasa, școala).

Pe parcursul anului școlar, completează mapa/dosarul cu:

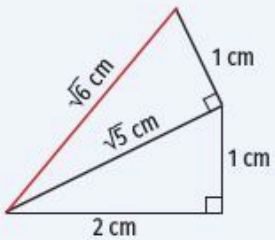
- temele (individuale sau realizate în grup);
- proiectele;
- fișele de lucru;
- fișele de autoevaluare etc.

Criteriile de organizare și de evaluare a portofoliului se vor stabili la nivelul clasei.

Portofoliu

Cu ajutorul instrumentelor geometrice, construiește segmente care să aibă următoarele lungimi:

- $\sqrt{2}$ cm;
- $\sqrt{3}$ cm;
- $\sqrt{13}$ cm;
- $\sqrt{14}$ cm;
- $\sqrt{15}$ cm;
- $\sqrt{42}$ cm.



2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real



Îmi amintesc

1. Determină numărul întreg n cu proprietatea $n < a < n + 1$.

a) $a = 2{,}53$; c) $a = \sqrt{153}$; e) $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$; g) $a = 7 - 4\sqrt{5}$;

b) $a = -0{,}3$; d) $a = -\sqrt{83}$; f) $a = 2 + \sqrt{10}$; h) $a = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$.

2. Pe axa numerelor se consideră punctele distincte două câte două A(a), B(b), C(c) și D(d), în această ordine, unde a, b, c, d sunt numere reale nenule.

a) Scrie în ordine crescătoare numerele a, b, c, d cu ajutorul simbolurilor matematice.

b) Precizează care dintre numerele a, b, c, d sunt negative, știind că punctul B este situat în stânga punctului O, iar punctul C este situat în dreapta punctului O.

Învăț

1. Compararea și ordonarea numerelor reale

Definiția 1. **Fie $a = a_0,a_1a_2a_3\ldots$ și $b = b_0,b_1b_2b_3\ldots$ două numere reale, unde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, iar $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.**

Spunem că numărul real a este egal cu numărul real b dacă $a_i = b_i$, pentru orice număr natural i.

Spunem că numărul real a este mai mic decât numărul real b, dacă există un număr natural k astfel încât $a_k < b_k$ și $a_i = b_i$, pentru orice număr natural $i < k$. Scriem $a < b$.

În acest caz, putem spune că b este mai mare decât a și scriem $b > a$.

EXEMPLU:

$2{,}364 < 2{,}39$ deoarece $2 = 2$, $3 = 3$ și $6 < 9$;

OBSERVAȚII.

1. Dacă $a < 0$, spunem că numărul a este negativ. Evident, $a < 0$ dacă și numai dacă $a_0 < 0$.
2. Dacă $a > 0$, spunem că numărul a este pozitiv. Evident, $a > 0$ dacă și numai dacă $a_0 > 0$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Știm că oricărui număr real i se asociază un punct pe axa numerelor. Fie A și B punctele asociate numerelor a și, respectiv, b. Atunci:

- $a < b$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la stânga punctului B.
- $a < 0$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la stânga punctului O (originea axei numerelor).
- $a > 0$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la dreapta punctului O.

Oricare ar fi numerele reale a și b, are loc una și numai una dintre relațiile $a < b$, $a = b$, $a > b$ (**legea de trihotomie**). Așadar, dacă a nu este mai mare decât b, atunci a este mai mic sau egal cu b, adică $a \leq b$. În loc de $a \leq b$ se poate scrie $b \geq a$.

Relația „≤" definită pe $\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

- **Reflexivitatea: $a \leq a$, pentru orice număr real a.**
- **Antisimetria: Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.**
- **Tranzitivitatea: Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.**

Relația „≤" definită pe $\mathbb{R}$, care satisface aceste proprietăți, se numește **relație de ordine pe $\mathbb{R}$**.

Considerând că pentru orice numere reale a și b avem $a \leq b$ sau $b \leq a$, spunem că **relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală**.

2. Aproximări prin lipsă sau prin adaos

În practică, valorile exacte ale mărimilor sunt rareori cunoscute, deoarece la orice instrument de măsură apare o anumită eroare. De aceea, în locul valorilor exacte ale mărimilor, de cele mai multe ori suntem nevoiți să folosim valorile lor aproximative. În general, o mărime poate fi reprezentată printr-o fracție zecimală infinită, dar în practică se utilizează doar un număr finit de zecimale, ceea ce reprezintă o valoare aproximativă a mărimii respective.

Fie $a, b, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

- **Numărul b aproximează prin lipsă numărul a cu o eroare mai mică decât k, dacă $b \leq a \leq b + k$ (adică $0 \leq a - b \leq k$).**
- **Numărul b aproximează prin adaos numărul a cu o eroare mai mică decât k, dacă $b - k \leq a \leq b$.**

În practică se folosesc îndeosebi aproximări cu o eroare mai mică decât 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} etc.

Se consideră $a = a_0,a_1a_2a_3\ldots$ un număr real.

- **Dacă $a > 0$, aproximările zecimale ale lui a cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt:**
  - **prin lipsă: $a_n' = a_0,a_1a_2a_3\ldots a_n$;**
  - **prin adaos: $a_n'' = a_0,a_1a_2a_3\ldots a_n + 10^{-n}$.**
- **Dacă $a < 0$, aproximările zecimale ale lui a cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt:**
  - **prin lipsă: $a_n' = a_0,a_1a_2a_3\ldots a_n - 10^{-n}$;**
  - **prin adaos: $a_n'' = a_0,a_1a_2a_3\ldots a_n$.**

OBSERVAȚIE.

Fie $a = a_0,a_1a_2a_3\ldots$ un număr real și a_n', a_n'' aproximările zecimale ale lui a prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- $a_n', a_n'' \in \mathbb{Q}$;
- $a_n' \leq a \leq a_n''$;
- $a_n' + 10^{-n} = a_n''$.

EXEMPLU:

Număr	Aproximare prin lipsă cu eroare mai mică decât:					Aproximare prin adaos cu eroare mai mică decât:				
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
2,1245787	2	2,1	2,12	2,124	2,1245	3	2,2	2,13	2,125	2,1246
-5,245368	−6	−5,3	−5,25	−5,246	−5,2454	−5	−5,2	−5,24	−5,245	−5,2453

Aproximarea zecimală prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, a numărului real $a = a_0,a_1a_2a_3...$ se mai numește și trunchierea după a n-a zecimală a numărului a.

Rotunjirea la a n-a zecimală a numărului real $a = a_0,a_1a_2a_3...$ este cel mai apropiat de a dintre a'_n și a''_n.

EXEMPLE:

1. Rotunjirea la a patra zecimală a numărului real $\sqrt{2}$ este 1,4142, deoarece $\sqrt{2}$ = 1,414235..., iar aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-4}, sunt 1,4142 și 1,4143. Dintre acestea, 1,4142 este mai apropiat de $\sqrt{2}$.
2. Rotunjirea la a treia zecimală a numărului real −1,2347 este −1,235, deoarece aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, sunt −1,235 și −1,234. Dintre acestea, −1,235 este mai apropiat de −1,2347.
3. Rotunjirea la a doua zecimală a numărului real −0,7219 este −0,72, deoarece aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-2}, sunt −0,73 și −0,72. Dintre acestea, −0,72 este mai apropiat de −0,7219.

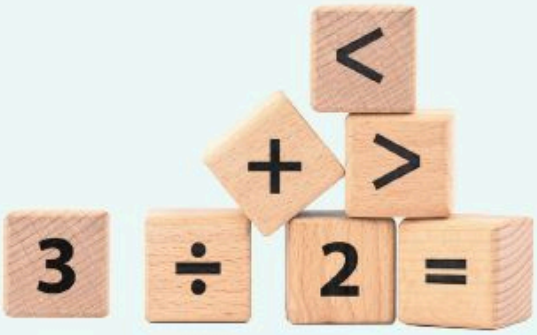
3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Știm că, pentru orice număr real a, există și este unic un număr întreg n astfel încât $n \le a < n + 1$. Numărul întreg n reprezintă partea întreagă a numărului real a.

***Definiția 1.* Partea întreagă a numărului real a este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a. Se notează cu $[a]$.**

EXEMPLE:

1. $[0] = 0$;
2. $[7] = 7$;
3. $[-3] = -3$;
4. $[2,51] = 2$, deoarece $2 < 2,51 < 3$;
5. $\left[-\frac{5}{6}\right] = -1$, deoarece $-1 < -\frac{5}{6} < 0$;
6. $[-\sqrt{7}] = -3$, deoarece $-3 < -\sqrt{7} < -2$.



OBSERVAȚII.

1. $[a] \le a < [a] + 1$, pentru orice număr real a.
2. $a - 1 < [a] \le a$, pentru orice număr real a.
3. $[a + n] = [a] + n$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n.

***Definiția 2.* Partea fracționară a numărului real a este diferența dintre numărul a și partea sa întreagă. Se notează cu $\{a\}$.**

Așadar, $\{a\} = a - [a]$, pentru orice număr real a.

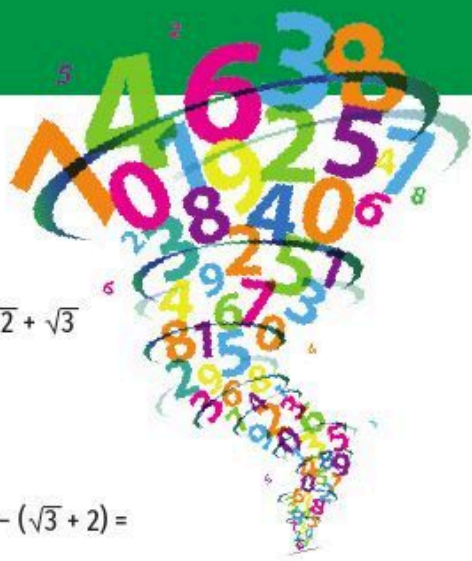
Cum $[a] \le a < [a] + 1$, rezultă că $0 \le a - [a] < 1$, deci $0 \le \{a\} < 1$, pentru orice număr real a.

EXEMPLE:

1. $\{7\} = 7 - [7] = 7 - 7 = 0$;
2. $\{2,51\} = 2,51 - [2,51] = 2,51 - 2 = 0,51$;
3. $\left\{-\frac{5}{6}\right\} = -\frac{5}{6} - \left[-\frac{5}{6}\right] = -\frac{5}{6} - (-1) = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}$;
4. $\{-\sqrt{7}\} = -\sqrt{7} - [-\sqrt{7}] = -\sqrt{7} - (-3) = -\sqrt{7} + 3$.

OBSERVAȚIE.

$\{a + n\} = \{a\}$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n.



ȘTIAI CĂ...?

Algoritmii care verifică dacă un cod de bare este valid folosesc partea întreagă pentru a calcula „cifra de control". Aceasta este ultima cifră din cod și are rolul de a preveni erorile: dacă scanerul citește greșit un număr, suma finală nu se va mai potrivi cu cifra de control, iar sistemul va bloca tranzacția.

Pentru a determina cifra de control (C), procedezi astfel:

- calculezi $S = I + 3P$, unde I reprezintă suma numerelor de pe pozițiile impare, iar P reprezintă suma numerelor de pe pozițiile pare ale codului de bare;
- calculezi $a = 10 - \left(S - \left[\frac{S}{10}\right] \cdot 10\right)$;
- calculezi $C = a - \left[\frac{a}{10}\right] \cdot 10$.



PROVOCARE

Determină cifrele de control ale următoarelor coduri de bare:

a) 594123456789 (C)

b) 484848484855 (C)

Exerciții rezolvate

1. Calculează $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{3} + 2|$.

Rezolvare:

$\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

$\sqrt{3} + 2 > 0 \Rightarrow |\sqrt{3} + 2| = \sqrt{3} + 2$

Obținem:

$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{3} + 2| = (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} + 2) =$

$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} - 2 = -3.$

2. Arată că numărul $A = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2}$ este irațional.

Rezolvare:

$A = \sqrt{(2\sqrt{5} - 5)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} = |2\sqrt{5} - 5| + |3 - \sqrt{7}| + |\sqrt{5} - \sqrt{7}|$

$2\sqrt{5} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} - 5 < 0 \Rightarrow |2\sqrt{5} - 5| = -(2\sqrt{5} - 5) = -2\sqrt{5} + 5$

$3 > \sqrt{7} \Rightarrow 3 - \sqrt{7} > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$

$\sqrt{5} < \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{7} < 0 \Rightarrow |\sqrt{5} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = -\sqrt{5} + \sqrt{7}$

Obținem:

$A = |2\sqrt{5} - 5| + |3 - \sqrt{7}| + |\sqrt{5} - \sqrt{7}| = -2\sqrt{5} + 5 + 3 - \sqrt{7} + (-\sqrt{5} + \sqrt{7}) =$

$= -2\sqrt{5} + 5 + 3 - \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} = -3\sqrt{5} + 8 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

3. Compară numerele reale $a = 3\sqrt{2} - 2$ și $b = 2\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = (3\sqrt{2} - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 22 - 12\sqrt{2} \\ b^2 = (2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 27 - 12\sqrt{2} \\ 22 < 27 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 22 - 12\sqrt{2} < 27 - 12\sqrt{2} \Rightarrow a^2 < b^2.$

Cum $a > 0$, $b > 0$ și $a^2 < b^2$, rezultă că $a < b$.

4. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real $\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}$.

Rezolvare:

$$\frac{1}{3\sqrt{2} - 4} \overset{\cdot(3\sqrt{2}+4)}{=} \frac{3\sqrt{2} + 4}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{3\sqrt{2} + 4}{2}$$

Rotunjim numărul real $\sqrt{2}$ la a doua zecimală și obținem 1,41.

Atunci $\frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \approx 4{,}1$, de unde rezultă $\left[\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2} + 4}{2}\right] = 4$ și

$\left\{\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}\right\} = \left\{\frac{3\sqrt{2} + 4}{2}\right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}.$

Putem proceda și astfel:

$3\sqrt{2} = \sqrt{18} \Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow 8 < 3\sqrt{2} + 4 < 9 \Rightarrow 4 < \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} < 4{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{3\sqrt{2} + 4}{2}\right] = 4, \left\{\frac{3\sqrt{2} + 4}{2}\right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}\right] = 4, \left\{\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}\right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}.$

5. a) Demonstrează că numărul real $\sqrt{n^2+6n+5}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul n.

b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real $\sqrt{n^2+6n+5}$, unde n este număr natural nenul.

Rezolvare:

$n^2+4n+4 < n^2+6n+5 < n^2+6n+9$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (n+2)^2 < n^2+6n+5 < (n+3)^2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{n^2+6n+5}$ este număr irațional, deoarece între pătratele a două numere naturale consecutive nu mai există pătratul unui alt număr întreg (n^2+6n+5 este număr natural, deci poate fi numai pătratul unui număr întreg).

b) $(n+2)^2 < n^2+6n+5 < (n+3)^2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n+2 < \sqrt{n^2+6n+5} < n+3$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$

Așadar, $[\sqrt{n^2+6n+5}] = n+2$ și $\{\sqrt{n^2+6n+5}\} = \sqrt{n^2+6n+5} - n - 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Determină rotunjirea numărului real $-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ la a treia zecimală.

Rezolvare:

$$-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = -\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = -\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

Cu ajutorul aplicației *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer, determinăm primele șase zecimale exacte ale numerelor reale $\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}$. Astfel, $\sqrt{5} = 2{,}236067...$ și $\sqrt{2} = 1{,}414213...$.

$\sqrt{5}-\sqrt{2} = 0{,}821854... \Rightarrow 2(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 1{,}643708... \Rightarrow -\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} = -0{,}547902...$.

Aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3} ale numărului real $-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ sunt $-0{,}548$ și $-0{,}547$, de unde rezultă că rotunjirea la a treia zecimală este $-0{,}548$.

Aplic

1. Dă exemple de numere iraționale care aparțin intervalului de numere reale $[2{,}1; 2{,}2]$.

2. Dă exemple de numere raționale care aparțin intervalului de numere reale $(\sqrt{15}, 4)$.

3. Ordonează crescător numerele reale:

a) $0{,}1(2)$; $0{,}(12)$; $0{,}12(1)$; $0{,}12$;

b) $-1{,}31(2)$; $-1{,}(312)$; $-1{,}3(12)$; $-1{,}312$;

c) $\frac{2023}{2024}, \frac{2024}{2025}, \frac{2025}{2026}, \frac{2026}{2027}$;

d) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, -\frac{2}{3}$.

4. Compară numerele reale:

a) $2\sqrt{5}$ și $3\sqrt{2}$;

b) $6\sqrt{2}$ și 8;

c) $-5\sqrt{3}$ și -9;

d) $-3\sqrt{15}$ și $-4\sqrt{10}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ și $\frac{3}{4\sqrt{5}}$;

f) $-\frac{2}{3\sqrt{6}}$ și $-\frac{3}{8\sqrt{2}}$;

g) $13-2\sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}-11$;

h) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ și $6-\sqrt{6}$.

5. Ordonează descrescător numerele reale:

a) $-4\sqrt{3}, -5\sqrt{5}, -3\sqrt{6}, -2\sqrt{15}$;

b) $\sqrt{5}-2, 2-\sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1$.

6. Demonstrează că $\sqrt{14}-3 > \sqrt{15}-\sqrt{10} > 4-\sqrt{11}$.

CONTEXTUALIZEZ

Sistemul de Poziționare Globală (GPS) este un instrument de măsurare a timpului și de aproximare a numerelor reale.

Telefonul tău nu știe unde te afli, ci primește mesaje de la sateliți. Aceștia trimit semnale radio care se propagă cu viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) și care conțin momentul exact al emiterii. Telefonul (receptorul) notează momentul recepției.

Distanța se calculează prin formula $d = c \cdot \Delta t$, unde c este viteza luminii în vid, iar Δt este timpul de propagare a semnalului (diferența de timp dintre momentul recepției semnalului și momentul emiterii acestuia).

Dacă sistemul face o eroare de aproximare în calculul timpului de 10^{-10} secunde, atunci eroarea de poziționare este de 0,03 m = 3 cm. Dacă eroarea de aproximare a timpului ar fi 10^{-7} secunde, atunci eroarea de poziționare ar fi de câteva zeci de metri, ceea ce ar face imposibilă navigarea pe străzi înguste.

CONTEXTUALIZEZ

Sunetul produs de o voce sau de o chitară este o undă a cărei intensitate variază constant, putând fi reprezentată în orice moment prin numere reale. Totuși, un computer nu poate stoca „infinitatea" de valori ale unei unde. Pentru a transforma sunetul în fișier (MP3 sau WAV), computerul „măsoară" unda de zeci de mii de ori pe secundă și o transformă într-un număr întreg, prin rotunjire. Cu cât eroarea de aproximare este mai mică, cu atât muzica se aude mai clar și mai aproape de realitate.

Deci, când asculți melodia preferată la căști, asculți de fapt miliarde de aproximări matematice redate atât de rapid, încât creierul tău le percepe ca pe un sunet continuu.

7. Calculează:

a) $|4\sqrt{3}-7|+|2\sqrt{3}-3|+2\cdot|\sqrt{3}+1|$;

b) $|3\sqrt{5}-7|-|\sqrt{5}-2|+2\cdot|2\sqrt{5}-3\sqrt{2}|+|6\sqrt{2}-9|$;

c) $\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$;

d) $|2\sqrt{3}-4|+|-2\sqrt{3}-1|-|5-2\sqrt{3}|$;

e) $\left|\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}-1\right|-|\sqrt{2}-4|$;

f) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(-\sqrt{7}+3)^2}-|2-\sqrt{5}|$;

g) $|\sqrt{20}-2\sqrt{7}|-|-3\sqrt{5}-\sqrt{7}|-3|\sqrt{7}-2\sqrt{5}|$.

8. Reprezintă pe axa numerelor reale: 2,4; 3,2; −2,3; $2\frac{1}{2}$; $-3\frac{1}{4}$; $\sqrt{5}$; $-2\sqrt{3}$; $-\sqrt{7}$; $-\frac{\sqrt{15}}{2}$.

9. Determină aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, unde $n\in\{1,2,3,4,5\}$ pentru următoarele numere reale: $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{6}$; 1,258321; −2,4235871; −4,2; 0,(3); −2,1(23); $\sqrt{7}$; $-\sqrt{5}$; $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

10. Determină rotunjirile la a n-a zecimală, unde $n\in\{1,2,3,4,5\}$ pentru următoarele numere reale: $-\frac{3}{2}$; −1,4; 5,123456; −0,4785621; 1,(321); −3,11(32); $\sqrt{3}$; $-\sqrt{10}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; $-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

11. Se consideră numărul real $a=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

a) Aproximează numărul a prin lipsă și prin adaos, cu eroare mai mică decât 10^{-2}.

b) Determină partea întreagă a numărului a.

c) Stabilește dacă numărul a este rațional sau irațional.

12. Fie x un număr real. Exprimă cu ajutorul modulului:

a) $-3<x<3$;

b) $1\le x+4\le 7$;

c) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$;

d) $-9<x<-7$;

e) $-\frac{8}{3}\le x\le-\frac{4}{3}$;

f) $a<x<b$ $(a,b\in\mathbb{R},a<b)$.

13. Determină valorile numărului real x pentru care:

a) $|x|\le 6$; b) $|2x-3|<5$; c) $|4-6x|\le 2$; d) $\left|\frac{1-2x}{3}\right|<3$.

14. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a.

a) $a=-3{,}5$; e) $a=-\frac{15}{9}$; i) $a=\sqrt{10}$; m) $a=3+\sqrt{15}$;

b) $a=1{,}0(6)$; f) $a=2{,}051$; j) $a=-2\sqrt{5}$; n) $a=\frac{1}{5-\sqrt{3}}$;

c) $a=\frac{10}{7}$; g) $a=-3{,}99$; k) $a=-\frac{2\sqrt{7}}{3}$; o) $a=\frac{1}{3+\sqrt{6}}$;

d) $a=-5,(3)$; h) $a=-\frac{4}{5}$; l) $a=\sqrt{2}-\sqrt{7}$; p) $a=\frac{1}{2\sqrt{5}+4}$.

15. Determină mulțimea valorilor numărului real x.

a) $[x]=1$;

b) $[2x-1]=3$;

c) $[-3x+5]=-2$;

d) $\left[\frac{4x+1}{6}\right]=-4$.

16. Calculează:

a) $[\sqrt{2026}] - 50 \cdot \{-2,1\}$;

b) $[2 - \sqrt{3}] + \left\{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right\}$;

c) $\left[\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right] - \left\{\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right\} - [\sqrt{5}] - \{-\sqrt{5}\}$;

d) $4 \cdot \left\{\frac{1}{-3 + \sqrt{5}}\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt{5} + 2}\right\}$;

e) $[(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2] - [(2 + \sqrt{5})^2]$;

f) $[(1 + \sqrt{3})^3] - [1 + \sqrt{3}]^3$;

g) $\{(\sqrt{3} - 1)^3\} - \{(2 - \sqrt{2})^3\}$;

h) $\left\{\frac{4}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3}\right\} - \left\{\frac{2}{(3 - 2\sqrt{2})^3}\right\}$.

17. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a.

a) $a = \sqrt{2026^2 - 2026}$;

b) $a = \sqrt{2027^2 + 2027}$;

c) $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{49 \cdot 50}$;

d) $a = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{47 \cdot 49}$.

18. Calculează:

a) $\left[\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}\right]$;

b) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{100}]$;

c) $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \ldots + [\sqrt{99 \cdot 100}]$.

19. Fie a un număr real, cu proprietatea $a \in [0, 1)$. Arată că numărul $\sqrt{(a - 1)^2} + \sqrt{a^2 - 3(2a - 3)} - \sqrt{(2 - a)^2} + \sqrt{a(a + 4) + 4}$ este întreg.

20. Fie a un număr real, cu proprietatea $-2 \le a \le 3$. Arată că numărul $\sqrt{(a + 2)^2} + |a - 4| + |7 - 2a| - 2|3 - a|$ aparține intervalului de numere reale $(4\sqrt{3}, 5\sqrt{2})$.

21. Demonstrează că:

a) $\sqrt{a^2 - 6a + 10} + \sqrt{b^2 - 4b + 13} \ge 4$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $\sqrt{4a(a - 1) + 5} + \sqrt{9b^2 + 4(3b + 5)} \ge 6$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

22. Fie a și b numere reale pozitive, iar m_a, m_g, m_h reprezintă media aritmetică, media geometrică și, respectiv, media armonică a numerelor a și b. Demonstrează că:

a) $m_a \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$;

b) $m_h \le m_g \le m_a$;

c) $m_g - m_h \le m_a - m_a$.

23. Fie n un număr natural nenul și $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Demonstrează că $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_3 a_4} + \ldots + \sqrt{a_{n-1} a_n} + \sqrt{a_n a_1} \le n \cdot m_a$, unde m_a reprezintă media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

24. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a.

a) $a = \sqrt{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}$;

b) $a = \sqrt{n^2 + 4n + 3}, n \in \mathbb{N}$;

c) $a = \sqrt{n^2 + 7n + 11}, n \in \mathbb{N}$;

d) $a = \sqrt{4n^2 + 3n}, n \in \mathbb{N}$.

25. Ana a înregistrat în tabelul următor temperaturile măsurate la aceeași oră pe parcursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	−3,9 °C	−2,6 °C	−4,1 °C	−1,6 °C	0 °C	1,9 °C	3,3 °C

a) În ce zile au fost înregistrate temperaturi pozitive?

b) Reprezintă pe axa numerelor reale numerele asociate valorilor temperaturilor din tabelul Anei.

c) Ordonează crescător temperaturile înregistrate de Ana în tabel.

d) Calculează diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură înregistrate.

e) Determină media temperaturilor înregistrate de Ana în tabel.



SĂ NE AMINTIM!

- **media aritmetică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\frac{a + b}{2}$;
- **media geometrică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\sqrt{a \cdot b}$;
- **media armonică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

ȘTIAI CĂ...?

O eroare de aproximare prin lipsă a cauzat un haos imens la bursa din Vancouver în 1982.



Indicele bursier era calculat de mii de ori pe zi, iar software-ul trunchia rezultatul după a treia zecimală, în loc să îl rotunjească la a treia zecimală. Deși diferența părea infimă, modul acesta de calcul a dus la scăderea artificială a indicelui la fiecare tranzacție și, în mai puțin de doi ani, valoarea lui a ajuns de la 1 000 la 524,8, deși, în realitate, bursa crescuse.

Când matematicienii au analizat software-ul, au descoperit eroarea. În weekendul din 25 noiembrie 1983, au corectat codul, iar luni dimineață, când au pornit computerul cu algoritmul de rotunjire corect, indicele a „sărit" de la 524 la valoarea sa reală de 1 098,892.

26. Un elev are la matematică notele 7, 8, 9 și 5.

a) Determină media aritmetică a notelor elevului.

b) Care este media la matematică a elevului?

c) Ce notă trebuie să mai obțină elevul pentru ca media să fie 8?

d) Este posibil ca elevul să obțină media 9 după ce mai primește încă 2 note? Justifică răspunsul.

e) Care sunt cele două note egale pe care trebuie să le obțină elevul pentru ca media celor 6 note să fie 8?

27. Pe ambalajul unui produs este înscrisă masa acestuia: $25 \pm 0{,}02$ g.

a) Scrie mulțimea valorilor posibile ale masei produsului, exprimată în grame.

b) Exprimă mulțimea valorilor posibile ale masei produsului (în grame) folosind modulul.

c) Reprezintă pe axa numerelor reale valorile celei mai mari și celei mai mici dintre masele posibile ale produsului, exprimate în grame. Care este distanța dintre cele două puncte obținute pe axa numerelor?

INDICAȚIE:

Dacă pe ambalajul unui produs este marcată masa acestuia sub forma $a \pm b$ g, atunci masa reală a produsului poate fi minimum $a - b$ grame și maximum $a + b$ grame.

28. Temperatura optimă într-un laborator trebuie să fie între 18 °C și 22 °C. Exprimă această condiție cu ajutorul modulului.

29. Un senzor măsoară temperatura $t = 20{,}3$ °C, cu o eroare de măsurare de $\pm 0{,}03$ °C.

a) Determină intervalul în care se poate afla temperatura reală.

b) Exprimă mulțimea valorilor posibile ale temperaturii folosind modulul.

c) Determină aproximările temperaturii cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

d) Reprezintă pe axa numerelor reale valorile extreme ale temperaturii posibile și calculează diferența dintre temperatura maximă și temperatura minimă.

30. Într-o sală de clasă se află o tablă dreptunghiulară cu dimensiunile 3 m, respectiv 2 m. Trei elevi măsoară lungimea diagonalei tablei. În tabelul de mai jos sunt înregistrate rezultatele obținute de aceștia:

Nume elev	Ana	Bogdan	Carmen
Rezultatul măsurătorii	3,6 m	3,7 m	3,5 m

a) Determină lungimea reală a diagonalei tablei.

b) Calculează eroarea fiecărei măsurători (diferența în valoare absolută față de valoarea reală).

c) Reprezintă pe axa numerelor reale valorile obținute prin măsurare de către cei trei elevi, precum și valoarea lungimii diagonalei tablei (exprimate în metri).

d) Care elev a măsurat cu cea mai mare precizie? Justifică răspunsul.

e) Rotunjește lungimea reală a diagonalei tablei, exprimată în metri, la a doua zecimală.

Exerciții recapitulative

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{-\sqrt{17}; 1,(3); -\frac{2}{4}; \sqrt{4}; -\sqrt{(-3)^4}; -2^2; -\sqrt{5}; \frac{32}{8}; \frac{6}{10}; (-2)^3; \sqrt{6\frac{1}{4}}\right\}$.

a) Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

b) Reprezintă pe axa numerelor reale elementele mulțimii A.

c) Determină partea întreagă și partea fracționară a elementelor mulțimii A.

2. Se consideră numerele reale $a = \left(-\frac{5}{12} : \frac{25}{18} + \frac{7}{10}\right) \cdot \frac{5}{2} + 3$, $b = \left\{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\right] : \frac{1}{8} - 7\right\} \cdot (-3)^2$,

$c = \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right) : \frac{7}{12} - \left(3 : 0,(3) - 3,(3) : \frac{1}{3}\right)$, $d = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{6}}}$.

a) Precizează care dintre numerele reale a, b, c sunt raționale.

b) Scrie aproximările prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, ale numărului real d.

c) Reprezintă, pe axa numerelor reale, numerele a, b, c, media aritmetică a numerelor a și b și media aritmetică a numerelor a, b și c.

d) Ordonează descrescător numerele $\frac{3}{a}, \frac{8}{b}, \frac{10}{c}, \frac{3}{d}$.

3. Se consideră numerele reale $a = \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \frac{2}{3 + \sqrt{7}} - \sqrt{7}$ și $b = \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} + 1$.

a) Compară numerele reale a și b.

b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numerelor a și b.

c) Determină numerele raționale x și y pentru care $\frac{a}{b} = x + y\sqrt{7}$.



4. Determină valorile numărului real x pentru care:

a) $|x + 2| + |x^2 + 9| = 0$;

b) $|x^2 - 8| = 1$;

c) $||1 - 2x| + 2| = 5$;

d) $\left|\frac{5 + 3x}{4}\right| = 2$;

e) $|x - 2| + |x^2 - 4| \leq 0$;

f) $|3 - 5x| < 2$.

5. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x - \frac{1}{x} = 4$. Determină $x^3 - \frac{1}{x^3}$.

6. Compară numerele reale:

a) $3\sqrt{7}$ și 8;

b) $-6\sqrt{5}$ și $-5\sqrt{6}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{15}}$ și $\frac{4}{3\sqrt{6}}$;

d) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$ și $6 - \sqrt{15}$.

7. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a.

a) $a = -1,7(2)$;

b) $a = \frac{17}{3}$;

c) $a = -5\sqrt{6}$;

d) $a = 2 + \sqrt{10}$;

e) $a = \sqrt{n^2 + 2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

f) $a = \sqrt{n^2 + 9n + 12}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Se consideră numerele reale: $-5,68568; -\frac{7}{5}; -1,(32); 2,(5); -2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$.

a) Ordonează crescător numerele.

b) Determină aproximările numerelor prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, și rotunjirile numerelor la a n-a zecimală, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

9. Pentru ca peștii dintr-un acvariu să fie sănătoși, nivelul pH-ului apei trebuie să fie 7,2, cu o toleranță de 0,4.

a) Scrie intervalul de valori admise pentru pH-ul apei din acvariu.

b) Exprimă condiția de siguranță a pH-ului folosind modulul unui număr real.

c) Un senzor măsoară pH-ul și afișează valoarea 7,58. Determină abaterea față de valoarea ideală de 7,2.

d) Dacă senzorul are o eroare de precizie de 0,05, determină valoarea minimă reală pe care o poate avea pH-ul atunci când aparatul indică 7,58.